

4. Кулагина М.Ф. О некоторых бесконечных системах с разностными индексами // Изв. ВУЗов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18-23.

5. Кулагина М.Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. ВУЗов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19-29.

CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS TO SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.F. Kulagina, R.A. Romyancev

By using the generalized discrete Fourier transforms, they are constructed almost-periodic in the sense of Bohr solutions of the Dirichlet and Neumann problems for half-space and spatial layer problems on the free oscillation of a large membrane vibration of a thin elastic plate, heat conduction in an infinite medium in absence of sources. All solutions of the problems are obtained in the form of absolutely convergent Fourier series whose coefficients are expressed through the given functions.

Keywords: generalized discrete Fourier transform, Dirichlet problem, Neumann problem, half-space, spatial layer, fluctuations, thermal conductivity.

УДК 517.923

О РЕЖИМАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

А.Ф. Курин¹

¹ afkurin@mail.ru; Воронежский государственный университет

В статье доказывается существование режимов хаотических колебаний в решении неоднородного уравнения Дуффинга без затухания с малой нелинейностью и малой амплитудой внешней периодической силы. Выводится соотношение, связывающее параметры уравнения, которые обеспечивают настройку осциллятора Дуффинга на указанные режимы.

Ключевые слова: метод усреднения, осциллятор, бифуркации.

В литературе (см., напр., [1, 2]) приведены примеры систем, в которых имеются режимы хаотических колебаний. В настоящей работе такие колебания описаны для хорошо известного квазилинейного варианта уравнения Дуффинга.

Неоднородное без затухания при наличии линейной составляющей упругой силы уравнение Дуффинга

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \varepsilon \nu z^3 + \varepsilon a \cos \Omega_1 t = \varepsilon \varphi(z, t), \quad (1)$$

где $\Omega^2 > 0$, $a > 0$, $\Omega_1 > 0$, ν – постоянные величины, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, будем интегрировать методом усреднения, используя второе приближение метода [3, 4]. Для этого воспользуемся переменными ван дер Поля (b – амплитуда, ψ – фаза, при этом $z = b \cos \psi$), для которых из (1) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega} (\nu b^3 \cos^3 \psi \sin \psi + a \cos \Omega_1 t \sin \psi), \\ \dot{\psi} &= \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b} (\nu b^3 \cos^4 \psi + a \cos \Omega_1 t \cos \psi). \end{aligned} \quad (2)$$

Введя фазу $\phi = \Omega_1 t$, дополним систему третьим уравнением $\dot{\phi} = \Omega_1$. Далее, в системе (2) после тригонометрических преобразований появляется фаза $\theta = \psi - \phi$. Если считать частоты Ω и Ω_1 близкими и обозначить частотную расстройку как $\Omega - \Omega_1 = \varepsilon h$, эта фаза будет медленной. Для нее запишем уравнение $\dot{\theta} = \psi - \dot{\phi}$. Окончательно приходим к системе четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega} \left\{ \frac{vb^3}{8} (2 \sin 2\psi + \sin 4\psi) + \frac{a}{2} [\sin(\psi + \phi) + \sin \theta] \right\}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon h - \frac{\varepsilon}{\Omega b} \left\{ \frac{vb^3}{8} (3 + 4 \cos 2\psi + \cos 4\psi) + \frac{a}{2} [\cos(\psi + \phi) + \cos \theta] \right\}, \\ \dot{\psi} &= \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b} \left\{ \frac{vb^3}{8} (3 + 4 \cos 2\psi + \cos 4\psi) + \frac{a}{2} [\cos(\psi + \phi) + \cos \theta] \right\}, \\ \dot{\phi} &= \Omega_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Система имеет известный в методе усреднения вид [3]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y), \\ \dot{y} &= \omega + \varepsilon Y(x, y), \end{aligned}$$

где $x = (b, \theta)$ – вектор медленных переменных, $y = (\psi, \phi)$ – вектор быстрых переменных (быстрые фазы), $\omega = (\Omega, \Omega_1)$. Система интегрируется по известной схеме [3, 4]. В частности, поскольку $\omega \neq \omega(x)$, во втором приближении метода неизвестные функции имеют вид

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}). \quad (4)$$

Здесь \bar{x} , \bar{y} – новые переменные, а функции u_1 , v_1 вычисляются интегрированием по \bar{y} . Отметим, что возникающие при интегрировании произвольные функции, зависящие от \bar{x} , полагаются равными нулю. Тогда в (4) u_1 , v_1 описывают только быстрые колебания, которые накладываются на движение $\bar{x}(t)$. В результате для средних значений \bar{x} медленных переменных x во втором приближении получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\bar{b}} &= -\left(\varepsilon \frac{a}{2\Omega} + \varepsilon^2 \frac{3va\bar{b}^2}{32\Omega^3} \right) \sin \bar{\theta}, \\ \dot{\bar{\theta}} &= \varepsilon \left(h - \frac{3v\bar{b}^2}{8\Omega} \right) - \varepsilon^2 \frac{51v^2\bar{b}^4}{256\Omega^3} - \left(\varepsilon \frac{a}{2\Omega\bar{b}} + \varepsilon^2 \frac{9va\bar{b}}{32\Omega^3} \right) \cos \bar{\theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

из которой следует интеграл

$$\cos \bar{\theta} = \frac{h\bar{b} - \frac{3v\bar{b}^3}{16\Omega} - \varepsilon \frac{17v^2\bar{b}^5}{256\Omega^3}}{\frac{a}{\Omega} + \varepsilon \frac{3va\bar{b}^2}{16\Omega^3}} + \frac{C_1}{\bar{b} \left(1 + \varepsilon \frac{3v\bar{b}^2}{16\Omega^2} \right)},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Исключая $\bar{\theta}$ из системы (5) с помощью интеграла, приходим к уравнению осциллятора

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{b}} &= \left(-\frac{\varepsilon^2 h^2}{4} + \frac{3\varepsilon^2 va C_1}{32\Omega^2} + \frac{3\varepsilon^3 va^2}{32\Omega^4} \right) \bar{b} + \left(\frac{3\varepsilon^2 v h}{16\Omega} + \frac{9\varepsilon^4 v^2 a^2}{512\Omega^6} + \frac{17\varepsilon^3 v^2 a C_1}{256\Omega^4} \right) \bar{b}^3 + \\ &+ \left(-\frac{27\varepsilon^2 v^2}{1024\Omega^2} + \frac{51\varepsilon^3 v^2 h}{512\Omega^3} \right) \bar{b}^5 - \frac{51\varepsilon^3 v^3}{2048\Omega^4} \bar{b}^7 - \frac{1445\varepsilon^4 v^4}{512\Omega^6} \bar{b}^9 + \frac{\varepsilon^2 a^2 C_1^2}{4\Omega^2 \bar{b}^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Установим закономерности колебаний осциллятора (6), ограничиваясь здесь первым приближением метода усреднения. В этом случае, как известно [3], $b = \bar{b}$, $\theta = \bar{\theta}$. Система (5) упрощается

$$\begin{aligned}\dot{b} &= -\frac{p}{2} \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= s - \frac{3q}{8} b^2 - \frac{p}{2b} \cos \theta,\end{aligned}\quad (7)$$

где $p = \varepsilon a / \Omega$, $q = \varepsilon v / \Omega$, $s = \varepsilon h$. Интеграл приобретает вид

$$\cos \theta = \frac{s}{p} b - \frac{3q}{16p} b^3 + \frac{C_1}{b}.$$

Используя произвольные начальные значения $b(0)$, $\theta(0)$, из интеграла получаем

$$C_1 = b(0) \cos \theta(0) - \frac{s}{p} b(0)^2 + \frac{3q}{16p} b(0)^4.$$

Далее будем считать $C_1 \neq 0$.

Уравнение осциллятора (6) записывается как

$$\ddot{b} = -\frac{p}{2} \cos \theta \cdot \dot{\theta} = \left(-\frac{s^2}{4} + \frac{3pqC_1}{32} \right) b + \frac{3sq}{16} b^3 - \frac{27q^2}{1024} b^5 + \frac{p^2 C_1^2}{4b^3} = F(b). \quad (8)$$

Перечислим неотрицательные корни уравнения $F(b) = 0$, которые определяют положения равновесия осциллятора

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{8\alpha}{3} \pm \sqrt{D_1}}, \quad b_{3,4} = \sqrt{\frac{8\alpha}{9} \pm \sqrt{D_2}}, \quad D_1 = \frac{64\alpha^2}{9} + \frac{16\beta}{3}, \quad D_2 = \frac{64\alpha^2}{81} - \frac{16\beta}{9},$$

где $\alpha = s/q$, $\beta = pC_1/q$.

Из анализа неравенств $D_{1,2} > 0$ и знака подкоренных выражений в $b_{1,2,3,4}$ заключаем, что на плоскости параметров α^2 , β из шести областей имеются две области с тремя положениями равновесия: в области B ($\alpha > 0$, $0 < \beta < 4\alpha^2/9$) положения равновесия b_1 , b_3 , b_4 , в области C ($\alpha > 0$, $0 < \beta < -4\alpha^2/3$) – это b_1 , b_2 , b_3 .

Из закона сохранения энергии осциллятора (8) следует, что потенциал

$$\Pi(b) = \frac{q^2}{8} \left(\alpha b - \frac{3}{16} b^3 + \frac{\beta}{b} \right)^2$$

имеет минимумы при $b = b_1$ и $b = b_4$, максимум – при $b = b_3$. В точках экстремума потенциалы равны

$$\begin{aligned}\Pi(b_4) &= \Pi_{min1} = \frac{q^2}{8} \left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} - \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16} \right), \\ \Pi(b_3) &= \Pi_{max} = \frac{q^2}{8} \left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} + \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16} \right), \quad \Pi(b_1) = \Pi_{min2} = 0.\end{aligned}$$

В области C получаем минимумы при $b = b_1$ и $b = b_2$, максимум – при $b = b_3$ с потенциалами

$$\Pi(b_2) = \Pi_{min1} = 0, \quad \Pi(b_3) = \Pi_{max} = \frac{q^2}{8} \left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} + \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16} \right), \quad \Pi(b_1) = \Pi_{min2} = 0.$$

Таким образом, в каждой из указанных двух областей существуют две потенциальные ямы, разделенные потенциальным барьером. Как показывают вычисления, для обеих областей бифуркационные значения параметров, соответствующие настройке осциллятора (8) на максимум Π , связаны соотношением

$$\tilde{\alpha} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P},$$

в котором

$$P = \tilde{\gamma} - 4, \quad Q = -\left(\frac{81\tilde{\gamma}^3}{64} + 6\tilde{\gamma} - \frac{27\tilde{\gamma}^2}{4}\right), \quad R = -\frac{9\tilde{\gamma}^2}{4}.$$

Здесь введены обозначения параметров

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{C_1^2} = \frac{\Omega(\Omega - \Omega_1)}{\varepsilon \nu C_1^2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{p}{sC_1} = \frac{\varepsilon a}{\Omega(\Omega - \Omega_1)C_1}.$$

Система уравнений (7) с использованием параметров $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{b}}{d\tau} &= -\frac{\tilde{\gamma}}{2} \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 1 - \frac{3}{8\tilde{\alpha}} \tilde{b}^2 - \frac{\tilde{\gamma}}{2\tilde{b}} \cos \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{b} = b/C_1$, $\tau = st$.

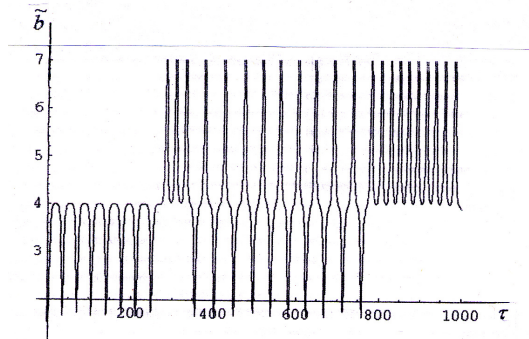


Рис. 1. Хаотические колебания

На рис. 1 представлен график хаотических колебаний амплитуды \tilde{b} , полученный численным решением системы (9) при $\tilde{\alpha} = 12$, $\tilde{\gamma} = 4.0000025$, когда осциллятор (8) настроен на вершину потенциального барьера в области B .

Литература

1. Кузнецов С. П. *Динамический хаос*. – М.: Физматлит, 2006. – 355 с.
2. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

3. Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Гребеников Е. А. *Метод усреднения в прикладных задачах*. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

ON REGIMES OF CHAOTIC OSCILLATIONS FOR A SOLUTION OF THE DUFFING EQUATION

A.F. Kurin

In this paper, the existence of regimes of chaotic oscillations for a solution of the inhomogeneous Duffing equation, without attenuation, with a small nonlinearity and a small amplitude of the external periodic force, is proved. A relation connecting the parameters of the equation is derived, which ensure the tuning of the Duffing oscillator to the considered regimes.

Keywords: averaging method, oscillator, bifurcations.

УДК 512.579

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАДУИРОВАННЫХ ИДЕАЛОВ ПОЛУГРУППОВЫХ C^* -АЛГЕБРЕ.В. Липачева¹, Т.А. Григорян²

¹ elipacheva@gmail.com; Казанский государственный энергетический университет

² tkhorkova@gmail.com; Казанский государственный энергетический университет

В статье продолжается начатое ранее исследование C^ -алгебры, порожденной левым регулярным представлением абелевой полугруппы. Изучаются идеалы этой C^* -алгебры, инвариантные относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов рассматриваемой алгебры. Доказывается, что инвариантность идеала равносильна тому, что он является градуированной C^* -алгеброй. Отдельно изучается класс примитивных градуированных идеалов, порожденных одним проектором.*

Ключевые слова: C^* -алгебра, градуированная C^* -алгебра, полугруппа, левое регулярное представление, инвариантные подпространства, представление в группе автоморфизмов, инвариантный идеал, коммутаторный идеал.

В работах [1, 2] было начато исследование C^* -алгебры, порожденной регулярным изометрическим представлением абелевой полугруппы S , так называемой приведенной полугрупповой C^* -алгебры $C_{red}^*(S)$, которую можно рассматривать как естественное обобщение алгебры Теплица. В частности, было доказано, что C^* -алгебра $C_{red}^*(S)$ является градуированной C^* -алгеброй, были описаны некоторые свойства этой алгебры, было начато исследование ее идеалов и автоморфизмов. В настоящей работе продолжено исследование идеалов C^* -алгебры $C_{red}^*(S)$, инвариантных относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов $\text{Aut}(C_{red}^*(S))$.

Пусть S — аддитивная абелева полугруппа с сокращением, содержащая нейтральный элемент. Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S) = \{f: S \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{a \in S} |f(a)|^2 < \infty\}$$